

Welcher Körper ist schneller unten?

Versuch

Folgende Körper werden gleichzeitig eine schiefe Ebene runterrollen gelassen: Eine Kugel, ein Zylinder und ein Hohlzylinder.

Sie kommen in folgender Reihenfolge unten an: Kugel, Zylinder, Hohlzylinder. Warum?

Erklärung

Hier beitet sich der Ansatz über den Energieerhaltungssatz an. Am oberen Ende der schiefen Ebene haben alle Körper die gleiche potentielle Energie E_{pot} . Während dem Runterrollen wird diese potentielle Energie umgewandelt: in kinetische Energie E_{kin} und Rotationsenergie E_{rot} .

Es gilt:

$$E_{pot} = E_{kin} + E_{rot} \text{ (Energieerhaltungssatz)}$$

$$E_{pot} = mgh \text{ wobei } m..Masse, g..Fallbeschleunigung, h..Höhe der geneigten Ebene$$

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} \text{ wobei } m..Masse, v..Geschwindigkeit$$

$$E_{rot} = \frac{J\omega^2}{2} \text{ wobei } J..Massenträgheitsmoment, \omega..Winkelgeschwindigkeit, Drehgeschwindigkeit des Körpers$$

Das Massenträgheitsmoment gibt an, wie träge ein Körper auf ein Andrehen reagiert, sprich wieviel Energie nötig ist, um ihm eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit (daraus folgt die Umdrehungsfrequenz) zu geben. Das Massenträgheitsmoment wird für unsere drei Körper unterschiedlich berechnet:

Körper 1, Kugel:

$$J = \frac{2}{5}mr^2$$

Körper 2, Zylinder:

$$J = \frac{1}{2}mr^2$$

Körper 3, (dünnwandiger) Hohlzylinder:

$$J = mr^2$$

Um heraus zu finden, welcher Körper am schnellsten unten ist, müssen wir jetzt nur noch nach v umstellen. Der Körper mit der größten Endgeschwindigkeit ist am schnellsten unten.

Kugel:

$$E_{pot} = E_{kin} + E_{rot} \tag{1}$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{2mr^2\omega^2}{5 \cdot 2} \tag{2}$$

$$gh = \frac{v^2}{2} + \frac{r^2\omega^2}{5} \tag{3}$$

$$gh = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2 \tag{4}$$

$$v^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)^{-1} gh \tag{5}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{10}{7}gh} \tag{6}$$

Erklärung der Umformungen:

1. Energieerhaltungssatz
2. Einsetzen
3. Kürzen und durch m teilen
4. Die Geschwindigkeit v des Körpers ist genau so groß wie die Bahngeschwindigkeit v_B , da der Körper nicht rutscht, sondern rollt. Daher: $v_B = r\omega = v \Rightarrow r^2\omega^2 = v^2$
5. Nach v^2 umstellen
6. Wurzelziehen

Das ganze in Kurzform für Körper 2:

$$\begin{aligned}
 E_{pot} &= E_{kin} + E_{rot} \\
 mgh &= \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2\omega^2}{2 \cdot 2} \\
 gh &= \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^2 \\
 v_2 &= \sqrt{\frac{4}{3}gh}
 \end{aligned}$$

Und für Körper 3:

$$\begin{aligned}
 E_{pot} &= E_{kin} + E_{rot} \\
 mgh &= \frac{mv^2}{2} + \frac{mr^2\omega^2}{2} \\
 gh &= \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}v^2 \\
 v_3 &= \sqrt{gh}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{10}{7} &> \frac{4}{3} > 1 \\
 \frac{10}{7}gh &> \frac{4}{3}gh > gh \\
 \sqrt{\frac{10}{7}gh} &> \sqrt{\frac{4}{3}gh} > \sqrt{gh} \\
 v_1 &> v_2 > v_3
 \end{aligned}$$

Daraus folgt: Die Kugel ist als Erstes unten, dann kommt der Zylinder und zum Schluss der Hohlzylinder.